Einige Zeta-Summen Identitäten, die sich aus den Bernoulli-Zahlenmatrizen G_p und G_m ergeben

Gottfried Helms 17.01.2007

1. Intro:

In einem Thread in sci.math löste Robert Israel meine Frage nach Summierungsmöglickeiten der Bernoulli-Zahlen über den Weg der *Borel-Summation* divergenter Reihen (die Summierung der Bernoulli-Zahlen stellt eine divergente Reihensummation dar) und legte damit einen engen und ausgesprochen interessanten Zusammenhang der Summierung der Bernoulli-Zahlen und den Werten der Zeta-Funktion dar.

Daraus ergeben sich einige Identitäten für Summen von Zeta-Werten bzw deren fraktionaler Anteile, die ich so in meinen Formelsammlungen oder im Internet noch nicht gesehen habe, und die ich hier kurz präsentieren will.

2. Preliminaries

2.1. Notation, Definitionen:

Ich stelle das hier in meiner üblichen Matrix-Schreibweise dar.

(2.1.1.) Alle Matrizen sind mit infiniter Dimension zu verstehen,

(2.1.2.) Vektoren werden als (ebenso infinit dimensionierte) Spaltenvektoren angenommen,

(2.1.3.) Indizes in Matrizen/ Vektoren sind *r (row=zeile)* und *c(col=spalte)* und beginnen bei *0* ,

(2.1.4.) aus der Pari/GP-Schreibweise über nehme ich das ~-Symbol für die Transposition.

Ein Vektor, der als eine Potenzreihe verwendet wird:

(2.1.5.) $V(x) = [1, x, x^2, x^3,....]\sim$

Als Abkürzung für die einfache Summierung:

(2.1.6.) $E = V(x) = [1, 1, 1, 1,....]\sim$

so daß, z.B. die Summierung der Reihe

$$1*1 + 1*1/2 + 1*1/4 + 1*1/8 + ... = \Sigma_{r=0..oo} 1/2^{\,r}$$

sich einfach darstellt als

$$E\sim * V(1/2) = \Sigma_{r=0..oo} 1/2^{\,r} = 2$$

Die alternierende Summierung kann mit $V(-1)$ geschrieben werden, ich verwende hier das Kürzel

(2.1.7.) $J = V(-1) = [1,-1,1,-1,...]$

Einen Vektor, der eine Zeta-Reihe darstellt, schreibe ich:

(2.1.8.) $Z(s) = [1^{-s}, 2^{-s}, 3^{-s}, ...]\sim$

Sind diese Vektoren als Diagonalmatrizen zu verwenden füge ich ein kleines *d* als Prefix hinzu:

(2.1.9.) ${}_dJ = diag(J)$

(2.1.10.) ${}_dI = diag(E)$ *(Einheitsmatrix)*

Basismatrizen sind zusätzlich die Pascalmatrix P:

(2.1.11.) $$P = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

die vorzeichenbeaftete Pascalmatrix $P_j = P * {}_dJ$

(2.1.12.) $$P_j = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

und die als Eigensystem von P_j extrahierten Matrizen G_p und G_m mit den Eigenschaften:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1/2 & 1/2 & . & . \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & . \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1/2 & -1/2 & . & . \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & . \\ 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

(2.1.13.) $P_j = G_p * {}_dJ * G_p^{-1}$

(2.1.14.) ${}_dJ*P = G_m * {}_dJ * G_m^{-1}$

bzw

(2.1.15.) $P_j \; G_p = G_p * {}_dJ$

(2.1.16.) ${}_dJ*P \; G_m = G_m * {}_dJ$

G_p und G_m enthalten die Bernoulli-Zahlen, und G_p beginnt bspw so:

(2.1.17.) $$G_p = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ 1/2 & 1/2 & . & . & . & . \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & . & . & . \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & . & . \\ -1/30 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/5 & . \\ 0 & -1/12 & 0 & 5/12 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Die Einträge entprechen den Koeffizienten der Bernoulli-Polynome; abgesehen von einer Skalierung der Spalten c mit $1/(c+1)$ und Verwendung von $ß_1=+1/2$ anstatt $ß_1=-1/2$.

(2.1.18.) $G_{p\ r,c} := ß_{r-c} * binomial(r,c) / (c+1)$

2.2. *einige im Folgenden wichtigen Eigenschaften von P und P_j :*

Der zunächst wenig aufregenden Eigenschaft von P, eine Potenzreihe nach dem Binomialgesetz zu transformieren

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix}$$

(2.2.1.) $P *V(s) = V(s+1)$ *für alle komplexen s*

also z.B.

$P *V(2) = V(3)$

fügt die vorzeichenbehaftete Matrix P_j die bereits etwas mehr aufregende Eigenschaft hinzu, eine diesbezügliche Invariante aufzuweisen; denn aus

(2.2.2.) $P * V(-c) = V(-c+1)$

folgt:

(2.2.3.) $P * V(-c) = P *{}_dJ * V(c) = P_j * V(c) = V(-c+1) = V(1 - c)$

und zum Beispiel:

(2.2.4.) $P * V(-1/2) = V(-1/2+1) = V(1/2)$

(2.2.5.) $P_j * V(1/2) = V(1/2) * 1$

und $V(1/2)$ ist eine Invariante bezüglich der alternierend vorzeichenbehafteten Binomial-transformation, oder kürzer, der P_j-Transformation; $V(1/2)$ ist also ein Eigenvektor von Pj zum Eigenwert 1.

Noch interessanter wird P_j dadurch, daß sich unter den beliebig vielen Eigenvektoren, die sich aus der infiniten Multiplizität des Eigenwertes 1 ergeben, u.a. auch der Vektor B^+ der Bernoulli-Zahlen finden läßt (B^+ meint hier, die Bernoullizahl $ß_1$ ist $+1/2$ angenommen), sodaß

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.2.6.) $Pj \;\; * B^+ = B^+ * 1$

(2.2.7.) ${}_dJ * P \;\; * B^- = B^- * 1$

In [Binomialmatrix] habe ich weitere Eigenschaften ausführlicher dokumentiert; dort ist auch die Herleitung zu finden, wie statt eines einzelnen Bernoulli-vektors die kompletten Matrizen G_p und G_m (mit positiven bzw negativen $ß_1$) als Eigenmatrizen von P_j gewonnen werden können.

3. Summierungen von Bernoulli-Zahlen, Zeta-Werten und fraktionalem Anteil der Zeta-Werte

3.1. Summen der Bernoulli-Zahlen ergeben Zeta-Werte

Hier soll nun der von durch Robert Israel in *sci.math* hergestellte Zusammenhang der Matrizen G_p und G_m mit den Werten der Zeta-Funktion in weiteren interessanten Beispielen analysiert werden.

Die Basisinformation sind hierbei die Beziehungen:

(3.1.1.) $E\sim * G_m = [\zeta(2)\text{-}1, \zeta(3)\text{-}1, \zeta(4)\text{-}1,\ldots]$
(3.1.2.) $E\sim * G_p = [\zeta(2)\ \ , \zeta(3)\ , \ \zeta(4)\ \ ,\ldots\ ]$

im Matrixschema:

$$E\sim * G_m = Zet_m\sim$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ -1/2 & 1/2 & . & . & . & . \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & . & . & . \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & . & . \\ -1/30 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/5 & . \\ 0 & -1/12 & 0 & 5/12 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \quad Gm$$

$$[\ \ldots\ \ \ \ldots\ \ ]$$

$$\lim_{r\to oo} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z2\text{-}1 & z3\text{-}1 & z4\text{-}1 & z5\text{-}1 & z6\text{-}1 & z7\text{-}1 \end{bmatrix}$$

z2-1 usw ist hier ζ(2)-1 usw

die durch Borel-Summierung

(3.1.3.) $$\zeta(2)=\sum_{r=0}^{oo} ß_r^+ \qquad\qquad \zeta(2)-1=\sum_{r=0}^{oo} ß_r^- \quad \text{(Borel)}$$

und entsprechender Modifikationen gewonnen wurden. (*siehe 4.1 what is*).

Die Frage, die ich gestellt hatte, war die nach den Spaltensummen der Matrix $\boldsymbol{G_m}$; die die Ergebnisse in *(3.1.1)* ergab; hieraus leiten sich aufgrund der Regularität der Borel-Summierung auch die Modifikationen *(3.1.2)* ab, da die Ersetzung von $\boldsymbol{G_m}$ in der Summierung durch $\boldsymbol{G_p}$ in jeder Spalte lediglich den Wert

(3.1.4.) $ß^+_1 - ß^-_1 = 1/2 - (-1/2) = 1$

hinzufügt.

Der Kürze halber benenne ich die Vektoren

(3.1.5.) $[\zeta(2)\ \ , \ \zeta(3)\ \ , \ \ \zeta(4)\ \ ,\ldots] \ = Zet$
(3.1.6.) $[\zeta(2)\text{-}1, \ \zeta(3)\text{-}1, \ \ \zeta(4)\text{-}1,\ldots] \ = Zet_m$

wobei die zweite Zeile gerade die gebrochenen Anteile der Zeta-Werte beschreibt:

(3.1.7.) $[\ \{\zeta(2)\}\ , \{\ \zeta(3)\}\ , \ \{\ \zeta(4)\}\ ,\ldots] \ = Zet_m$

deren Summierung konvergiert und deshalb einfacher analytischer Untersuchung nach konventionellen Kriterien zugänglich ist, und es interessieren hier verschiedene Varianten von Summen dieser Zeta-Werte.

3.2. Summe von {ζ(2)} + {ζ(3)} + {ζ(4)} +....

Diese erste Variante ergibt sich aus der Aufteilung der trivialen Matrix-Multiplikation

(3.2.1.) $E\sim\ = E\sim\ * {}_dI$

in

(3.2.2.) $E\sim\ = E\sim\ * (G_m * G_m^{-1})$

wobei G_m und G_m^{-1} hier gegenüber G_p und G_p^{-1} zunächst vorgezogen wurden, da die Summierung der Zeta-zwischenwerte bei anschließender Verwendung mit G_p^{-1} nicht konvergent wäre. Vertauschen der Summierungsreihenfolge in (3.2.3) gibt (3.2.4) mit dem bereits bekannten Summierungsergebnis ***Zet$_m$***:

(3.2.3.) $E\sim\ = (E\sim\ * G_m) * G_m^{-1}$

(3.2.4.) $E\sim\ = \quad Zet_m \quad * G_m^{-1}$

$$Zet_m\sim\ * G_m^{-1} = E\sim \qquad * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 2 & . & . \\ 1 & 3 & 3 & . \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z2-1 & z3-1 & z4-1 & z5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

G_m^{-1} hat hierbei die Form

(3.2.5.) $$G_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 2 & . & . \\ 1 & 3 & 3 & . \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

und die erste Spalte ist identisch mit dem einfachen Summierungsvektor ***E***.

Die Multiplikation von Zet_m mit der ersten Spalte von G_m^{-1}, die gleich ***E*** ist und Identifikation mit dem ersten Eintrag in $E\sim$ der lhs bedeutet:

(3.2.6.)
$$E\sim_0 = 1 = Zet_m\sim\ * E$$
$$1 = \sum_{r=0}^{oo} (\zeta(2+r)-1)*1$$

und, da $\zeta(2+r)-1$ gleichzeitig den nicht-ganzzahligen Teil $\{\zeta(2+r)\}$ von $\zeta(2+r)$ anzeigt, läßt sich sehen:

(3.2.7.) *die Summe der Dezimalanteile von ζ(2) bis ζ(inf) ist = 1*

oder, mit der $\{x\}$-Notation für den fraktionalen Teil einer Zahl x:

(3.2.8.) $\{\zeta(2)\} + \{\zeta(3)\} + \{\zeta(4)\} + \{\zeta(5)\} + ... = 1$

Darüberhinaus haben wir durch die Matrix-Darstellung dasselbe Ergebnis als Summierung in ***jeder Spalte***, d.h. die infinite Liste von Identitäten:

(3.2.9.)
$$1 = \sum_{r=0}^{oo} \{\zeta(2+r)\} \qquad = 1*\{\zeta(2)\}+1*\{\zeta(3)\}+1*\{\zeta(4)\}+...$$
$$1 = \sum_{r=1}^{oo} \{\zeta(2+r)\}*\binom{r+1}{1} \qquad = 2*\{\zeta(3)\}+3*\{\zeta(4)\}+4*\{\zeta(5)\}+...$$
$$1 = \sum_{r=2}^{oo} \{\zeta(2+r)\}*\binom{r+1}{2} \qquad = 3*\{\zeta(4)\}+6*\{\zeta(5)\}+10*\{\zeta(6)\}+...$$
...

und wenn man die Formeln und das Ergebnis noch umstellt, bekommt man das schöne systematische Ergebnis:

(3.2.10.) $1\{\zeta(2)\} +1 \{\zeta(3)\} + 1 \{\zeta(4)\} + 1 \{\zeta(5)\} + ... = 1$

(3.2.11.) $1\{\zeta(2)\} +2 \{\zeta(3)\} + 3 \{\zeta(4)\} + 4 \{\zeta(5)\} + ... = \zeta(2)$

(3.2.12.) $1 \{\zeta(3)\} + 3 \{\zeta(4)\} + 6 \{\zeta(5)\} + ... = \zeta(3)$

(3.2.13.) $1 \{\zeta(4)\} + 4 \{\zeta(5)\} + ... = \zeta(4)$

Die Summierung der Zeta-Werte selbst ist nicht ohne weiteres möglich, da hier jeder Term größer 1 ist und die Partialsummen divergieren.

3.3. Alternierende Summierung {ζ(2)} - {ζ(3)} + {ζ(4)} -....

Die alternierende Summierung ist "technisch" interessant, da in der Formel des vorigen Abschnittes

(3.3.1.) $E\sim \;=\; Zet_m\sim \;*\; G_m^{-1}$

hier die Diagonalmatrix $_d\boldsymbol{J}$ eingefügt wird, und das Ergebnis X nicht sofort bekannt ist:

(3.3.2.) $X\sim \;=\; (Zet_m\sim *_dJ) * G_m^{-1}$

Unter Ausnutzung der Assoziativität erhält man jedoch:

(3.3.3.) $X\sim \;=\; Zet_m\sim * (\,_dJ * G_m^{-1}\,)$

und die rechte Klammer ist erkennbar Teil des Eigensystems von $_J\boldsymbol{P}$:

$$_dJ * P \;=\; G_m * \;_dJ * G_m^{-1}$$

und da $\boldsymbol{Zet}_m^{\sim} = \boldsymbol{E}\sim * \boldsymbol{G}_m$ ist (3.3.3) simpel:

(3.3.4.) $X\sim \;=\; E\sim \;*\; G_m \;*\; _dJ * G_m^{-1}$

$\qquad = E\sim \;*\; _dJ * P$

(3.3.5.) $\qquad = V(-1)\sim \;*\; P$

was bedeutet, als daß das gesuchte Ergebnis $\boldsymbol{X\sim}$ nichts anderes als die alternierend summierten Spalten der Binomialmatrix sind.

Diese Summierungen sind zwar nicht konvergent, aber mit Summierungsverfahren für alternierende divergente Reihen können ihnen Werte zugewiesen werden. Aus dem Artikel "Summations" ergibt sich allgemein für

(3.3.6.) $Y\sim \;=\; V(x)\sim * P$

die folgende Definition für den $\boldsymbol{Y}$-Vektor:

(3.3.7.) $Y\sim \;=\dfrac{1}{(1-x)}[1,\; \dfrac{x}{(1-x)},\; (\dfrac{x}{1-x})^2,...]$

Für $x=-1$ kann dies, z.B. mit der Euler-Summierung, als

(3.3.8.) $Y\sim \;=\; 1/2 * [1, - 1/2,\; 1/4,\; -1/8, ...].$

$Y\sim \;=\; 1/2 * V(-1/2)\sim$

gesetzt werden.

Es ergibt sich die komplette Herleitung:

$$\begin{aligned} X\sim &= Zet_m\sim * {}_dJ * G_m^{-1} \\ &= E\sim * G_m * {}_dJ * G_m^{-1} \\ &= E\sim * {}_dJ * P \\ &= V(-1)\sim * P \qquad (3.3.9.) \\ &= 1/2\ V(-1/2)\sim \end{aligned}$$

und

$$Zet_m\sim * {}_dJ * G_m^{-1} = 1/2\ V(-1/2) \qquad (3.3.10.)$$

$$Zet_m\sim * ({}_dJ * G_m^{-1}\ {}_dJ) = 1/2\ V(1/2) \qquad (3.3.11.)$$

Die alternierende Summierung der fraktionalen Zeta-Werte von $\zeta(2)$ bis $\zeta(inf)$ ergibt also folgendes Ergebnis (entsprechend den verschiedenen Spalten in $\boldsymbol{G_m}^{-1}$):

$$\begin{array}{ll|ll} \sum_{r=0}^{oo}(-1)^r*\{\zeta(2+r)\} & =\frac{1}{2} & 1\{\zeta(2)\}-1\{\zeta(3)\}+1\{\zeta(4)\}-\ldots & =\frac{1}{2} \\ \sum_{r=1}^{oo}(-1)^r*\{\zeta(2+r)\}*\binom{r+1}{1} & =-\frac{1}{4} & 2\{\zeta(3)\}-3\{\zeta(4)\}+4\{\zeta(4)\}-\ldots & =\frac{1}{4} \\ \sum_{r=2}^{oo}(-1)^r*\{\zeta(2+r)\}*\binom{r+1}{2} & =\frac{1}{8} & 3\{\zeta(4)\}-6*\{\zeta(5)\}+10\{\zeta(6)\}-\ldots & =\frac{1}{8} \\ \ldots & & \ldots & \end{array} \qquad (3.3.12.)$$

Im Matrixschema:

$$Zet_m\sim * (\ {}_dJ\ G_m^{-1}\ {}_dJ) = 1/2\ V(1/2)\sim$$

$$\begin{array}{cc} & * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & 2 & . & . \\ 1 & -3 & 3 & . \\ -1 & 4 & -6 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z2-1 & z3-1 & z4-1 & z5-1 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.4. Gewichtete Summierung 1*{ζ(2)} +2* {ζ(3)} + 3 * {ζ(4)} + ...

Genaugenommen ist die folgende Summierung, in Matrix-Notation, gedacht als:

$$X\sim = Zet_m\sim * {}_dZ(-1) * G_m^{-1} \qquad (3.4.1.)$$

mit dem zu bestimmenden Ergebnisvektor $\boldsymbol{X}$ (die Überschrift dieses Abschnittes benennt die gewichtete Summierung der fraktionalen Anteile der Zeta-Werte mit der ersten Spalte von G_m^{-1} allein).

Für diese Summierung kann ich im Moment noch keine Analysis vorlegen; die Heuristik (mit dem Euler-Summationsverfahren approximiert) ergibt allerdings die interessante und sehr wahrscheinliche Vermutung:

(3.4.2.)

$$\begin{aligned} 1\{\zeta(2)\} +2\ \{\zeta(3)\} + 3\ \{\zeta(4)\} + 4\ \{\zeta(5)\} + \ldots &= 1*(\zeta(2)+1) - 1 \\ 2*2\{\zeta(3)\} + 3*3\{\zeta(4)\} + 4*\ 4\{\zeta(5)\} + \ldots &= 2*(\zeta(3)+1) - 1 \\ 3*3\{\zeta(4)\} + 4*\ 6\{\zeta(5)\} + \ldots &= 3*(\zeta(4)+1) - 1 \\ 4*\ 4\{\zeta(5)\} + \ldots &= 4*(\zeta(5)+1) - 1 \end{aligned}$$

also

(3.4.3.) $Y\sim = [\ 1*(\zeta(2)+1)\ ,\ 2*(\zeta(3)+1)\ ,\ 3*(\zeta(4)+1)\ ,...\ ] - 1$

(3.4.4.) $= [\ \{\zeta(2)\}+2\ ,\ 2\{\zeta(3)\}+4\ ,\ 3*(\zeta(4)+1)\ ,...\ ] - 1$

(3.4.5.) $= (Zet\sim + (Z(0)\sim - Z(1)\sim)\ ) *\ _dZ(-1)$

oder umgeschrieben:

(3.4.6.)	$1\{\zeta(2)\} + 2\ \{\zeta(3)\} + 3\ \{\zeta(4)\} + 4\ \{\zeta(5)\} + ... = 1\ \zeta(2)$
(3.4.7.)	$1\{\zeta(2)\} + 2*2\{\zeta(3)\} + 3*3\{\zeta(4)\} + 4*\ 4\{\zeta(5)\} + ... = 2\ \zeta(3) + 1\ \zeta(2)$
(3.4.8.)	$2\ \{\zeta(3)\} + 3*3\{\zeta(4)\} + 4*\ 6\{\zeta(5)\} + ... = 3\ \zeta(4) + 2\ \zeta(3)$
(3.4.9.)	$3\ \{\zeta(4)\} + 4*\ 4\{\zeta(5)\} + ... = 4\ \zeta(5) + 3\ \zeta(4)$

3.5. Summierungen mit den original Zeta-werten [ζ(2), ζ(3), ζ(4)...]

Um einfache Ergebnisse für Summen der unveränderten Zeta-Werte zu erhalten, muß ein Satz Kofaktoren verwendet werden, der für die Summierung Konvergenz erzwingt. Hier ein erstes Beispiel.

Der Vektor ***Zet*** entsteht aus der Summierung der G_p Matrix anstelle der G_m-Matrix. Die G_p-Matrix hat die bekannte Eigenschaft, einen Vektor, der eine geometrische Reihe enthält, in eine Summe gleicher Potenzen zu verwandeln; z.B.

(3.5.1.) $G_p * 2*V(2) = V(1) + V(2)$

allgemein

(3.5.2.) $G_p * n*V(n) = V(1) + V(2) + ... + V(n)$

Umgekehrt, um einen Vektor ***V(n)*** als Ergebnis einer G_p-Transformation zu erhalten, kann man subtrahieren:

(3.5.3.) $G_p * (\ n*V(n)\ -\ (n-1)*V(n-1)\ )\ =\ V(n)$

Für ein einfaches Beipiel der Summierung von Zetawerten mit geeigneten Kofaktoren aus einem Vektor ***W***

$$Zet\sim * W = x_0$$

wählen wir einen Vektor ***W***, der sicher zur Konvergenz führt, z.B. einen Vektor ***V(1/2)*** bzw eine Kombination. Bei der Verwendung von G_p wissen wir nun bereits, daß in einer Formel

$$G_p * W = X$$

wenn ***X*** eine geometrische Reihe ***V(n)*** darstellt, ***W*** folgendermaßen bestimmt ist:

$$G_p * W = V(n)$$
$$W = n\ V(n)\ -\ (n-1)\ V(n-1)$$

und da die Summierung von ***X*** = ***V(n)*** in

$$E\sim * Gp * W = E\sim * V(n)$$

schließlich konvergent sein soll, wählen wir zunächst ***X*** *=* ***V****(1/2)*.

Die Summierungen der lhs und rhs

*Zet~ * W = Zet~ * (1/2 V(1/2) - (1/2 -1) V(1/2-1))*
*E~ * V(1/2)*

sind nun beide sicher konvergent, und wir erhalten für ***W***:

(3.5.4.) *Gp * W = V(1/2)*

(3.5.5.) *W = 1/2*(V(1/2)+V(-1/2))*
= [1 0 1/4 0 1/16 0 1/64 0 ...] ~

Es ergibt sich also aus der bekannten Summe ***E****~ ** ***V****(1/2) = 2* :

*E~ * (Gp * W) = E~ * X*
*(E~ * Gp) * W = E~ * V(1/2)*
*Zet ~ * W = 2*

(3.5.6.) *Zet ~ * [1 0 1/4 0 1/16 0 1/64 0 ...]~ = 2*

bzw.

(3.5.7.) $$\sum_{c=0}^{oo} \frac{\zeta(2+2c)}{2^{2c}} = 2$$

was man, wegen der guten Konvergenz, leicht numerisch bestätigt.

Analog kann man wählen

X = V(1/3)

Für ***W*** ergibt sich

*W = 1/3*V(1/3) - (-2/3)*V(-2/3)*

(3.5.8.) *= [1, -1/3, 3/9, -5/27, 11/81, -21/243, ...]~*

und

*E~ * (Gp * W) = E~ * V(1/3)*
*Zet ~ * W = 3/2*

(3.5.9.) *Zet ~ * [1, -1/3, 3/9, -5/27, 11/81, -21/243, ...]~ = 3/2*

bzw.

(3.5.10.) $$\sum_{c=0}^{oo} \zeta(2+c) \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{c+1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{c+1} \right) = \frac{3}{2}$$

Allgemein sollte dies geben:

(3.5.11.) $$\boxed{\sum_{c=0}^{oo} \zeta(2+c) \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{c+1} - \left(\frac{1-n}{n}\right)^{c+1} \right) = \frac{n}{n-1} \quad \text{für } n>=1}$$

(siehe die ähnliche Formel von P. Abbott unter 4.2)

3.6. Summierung potenzreihen-gewichteter Bernoulli-Zahlen zu ζ-Werten

Die erfolgreiche Summierung der Bernoulli-Zahlen in den Spalten der Matrix G_p läßt die Überlegung zu, welche weiteren Summierungen sinnvoll sein könnten. Im Zusammenhang mit der Matrix P_J, deren Eigenmatrix G_p ist, läßt sich eine interessante Möglichkeit untersuchen.

Man erinnere sich zunächst, daß aus der Eigen-dekomposition von P_J gilt:

(3.6.1.) $$P_j * G_p * {}_dJ = G_p$$

und eine Spalten-summierung der linken Seite gleichzeitig die Spaltensummierung der rechten Seite ergibt.

Nun ist

(3.6.2.) $$1/s\ V(1/s) * P = 1/(s-1)\ V(1/(s-1))$$

also z.B.

$$[1/2, 1/4, 1/8, ...] * P = [1, 1, 1, 1, ...]$$

und andererseits

(3.6.3.) $$P_j * G_p * {}_dJ = P * ({}_dJ\ G_p\ J) = P * G_m$$

Die Summierung

$$1/2\ V(1/2)\sim \quad * \quad P * G_m$$

kann folgendermaßen ersetzt werden:

(3.6.4.) $$1/2\ V(1/2)\sim * P \quad * G_m = V(1)\sim * G_m$$

und die rechte Seite wurde bereits analytisch gefunden als

(3.6.5.) $$V(1)\sim \quad * \quad G_m = Zet_m\sim \qquad = [\zeta(2)-1, \zeta(3)-1, ...]$$

so daß auch

(3.6.6.) $$1/2\ V(1/2)\sim * P * G_m = Zet_m\sim \qquad = [\zeta(2)-1, \zeta(3)-1, ...]$$

und wegen

$$P * G_m = G_p$$

nun auch

(3.6.7.) $$1/2\ V(1/2)\sim \quad * G_p \quad = Zet_m\sim \qquad = [\zeta(2)-1, \zeta(3)-1, ...]$$

Wir haben also bereits die zwei Ergebnisse

(3.6.8.) $$V(1)\ \sim\ *\ Gp\ =\ [\zeta(2)\ \ ,\zeta(3)\ \ , ...]$$
(3.6.9.) $$1/2\ V(1/2)\sim\ *\ Gp\ =\ [\zeta(2)-1, \zeta(3)-1, ...]$$

und es liegt nahe, über diesen Weg eine Systematik aufzubauen, also

$$1/n\ V(1/n)\sim\ *\ Gp\ =\ [\ x_0,\qquad x_1\qquad , x_2, \dots\ ]$$

Es findet sich mit diesem Ansatz heuristisch mithilfe der Euler-Summierung für eine Spalte c der sehr wahrscheinliche Grenzwert:

$$\boxed{(3.6.10.)\qquad 1/n\ V(1/n)\sim\ *\ Gp_{[c]}\ =\ \zeta(2+c)\ -\ \Sigma_{k=1..n-1}\ (1/k^{\,c+2})}$$

Das bedeutet eine andere Summierungseigenschaft, die die Bernoulli-Zahlen vermitteln, nämlich der Summen gleicher ***negativer*** Potenzen der natürlichen Zahlen.

Subtrahiert man

$$(\ V(1)\sim\ *\ G_p\ )\quad -\quad (\ 1/n\ V(1/n)\sim\ *\ G_p\ )$$

erhält man nach Einklammern für eine Spalte c :

$$(3.6.11.)\qquad (\ V(1) - 1/n\ V(1/n)\ )\sim\ *\ G_{p[c]}\ =\ \Sigma_{k=1..\,n-1}\ (\ 1\ /\ k^{\,c+2}\ )$$

Für die Spalte $c=0$ (die ungewichtete Folge der Bernoulli-zahlen, $ß_1=+1/2$) ergibt das den allgemeinen Ausdruck für $n>=1$:

(3.6.12.)

$$\Sigma_{k=0..oo}\ (1-1/n^{k+1})\ \ ß_k\ =\ \Sigma_{k=1..\,n-1}\ (1/k^2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2\ + \dots + 1/(n-1)^2$$

für die Spalten $c=1,2,3$:

(3.6.13.)

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{k=1..oo}\ (1-1/n^{k+1})\quad k\quad\ ß_{k-1}\ /2 = \Sigma_{k=1..\,n-1}\ (1/k^3) = 1 + 1/2^3 + \dots + 1/(n-1)^3\\
&\Sigma_{k=2..oo}\ (1-1/n^{k+1})\ bi(k,2))\ ß_{k-2}\ /3 = \Sigma_{k=1..\,n-1}\ (1/k^4) = 1 + 1/2^4 + \dots + 1/(n-1)^4\\
&\Sigma_{k=3..oo}\ (1-1/n^{k+1})\ bi(k,3))\ ß_{k-3}\ /4 = \Sigma_{k=1..\,n-1}\ (1/k^5) = 1 + 1/2^5 + \dots + 1/(n-1)^5
\end{aligned}$$

Allgemein erhält man für eine Spalte c:

$$\boxed{(3.6.14.)\qquad \sum_{k=c}^{oo}\left(1-\frac{1}{n^{k+1}}\right)\binom{k}{c}\frac{ß_{k-c}}{c+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{2+c}}=1+\frac{1}{2^{2+c}}+\frac{1}{3^{2+c}}+\dots+\frac{1}{(n-1)^{2+c}}}$$

und für $n->oo$ das bereits bekannte Ergebnis:

$$\boxed{(3.6.15.)\qquad \sum_{k=c}^{oo}\binom{k}{c}\frac{ß_{k-c}}{c+1}=\sum_{k=1}^{oo}\frac{1}{k^{2+c}}=\zeta(2+c)}$$

---

4. Einige Formeln und Fundstücke

4.1. Sci.math: what is the sum of

$$\sum_{k=0}^{oo} c(k,n) * ß_{k-n} = ?$$

Robert Israel in sci.math:

first example; n=1. Use

(4.1.1.) $$F(z) = \sum_{k=0}^{oo} ß_k * z^k = \Psi\left(1,1+\frac{1}{z}\right) * \frac{1}{z}$$

then

(4.1.2.) $$(z F(z))' = \sum_{k=0}^{oo} ß_k * (k+1) * z^k = -\Psi\left(2,1+\frac{1}{z}\right) * \frac{1}{z^2}$$
$$S(1) = 2(\zeta(3)-1)$$

(4.1.3.) *(In the current notation this means :)*
*E' * G_m[*,1] = S(1)/2 = ζ(3)-1*

Generally for any n

(4.1.4.) $$\frac{d}{dz}^{n}\left(z^{n} F(z)\right) = \sum_{k=0}^{oo} ß_k * (k+n)\ldots(k+1) * z^k = (-1)^n \Psi\left(n+1,1+\frac{1}{z}\right) * \frac{1}{z^{n+1}}$$
$$S(n) = (-1)^n \frac{\Psi(n+1,2)}{n!} = (n+1)(\zeta(n+2)-1)$$

(4.1.5.) *(In the current notation this means :)*

*E' * G_p[*,n]* $= S(n)/(n+1) - ß_1^{-} + ß_1^{+}$
$= \zeta(n+2)$

where $ß_1^{-}$ *-1/2,* $ß_1^{+}$ *= +1/2*

4.2. P. Abbot

Am 18.09.2006 12:14 schrieb Paul Abbott:

(4.2.1.) $$\frac{1}{1-p} = \sum_{k=0}^{oo} \zeta(2+k)\left(p^{k+1} - (p-1)^{k+1}\right) \qquad 0 \le p \le 1$$

(4.2.2.) $$\frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{oo} (-1)^k \zeta(2+k)\left(p^{k+1} - (p-1)^{k+1}\right) \quad 0 \le p \le 1$$

4.3. eine Darstellung der alternierenden Summe von $\zeta(2k)$

(4.3.1.) $$\sum_{k=1}^{oo} i^{2k}\zeta(2k) = -\pi(1+ß_1+\frac{1}{e^{2\pi}-1})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\pi}-1})$$

(Pari/GP) = 0.5766740474685811741340507947

Plouffe: Real and Imaginary parts of the Digamma or Psi function at a+b*i
0.5766740474685811 = Im(Psi(2+I*1))

4.4. Reflexionsformel Zeta

(4.4.1.) $$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos(\frac{s\pi}{2})\zeta(s)=-\frac{\beta_s}{s}$$ für ganze gerade s

(4.4.2.) $$\boxed{\zeta(k)=\frac{i^2}{2!}\frac{(2\pi i)^k}{k!}ß_k}$$ for even k

---

4.5. Gene Ward Smith in sci.math

http://groups.google.com/group/sci.math/browse_frm/thread/cbcd1d11e797e810/15e805d436f3c8ac?lnk=st&q=&rnum=4#15e805d436f3c8ac

Here's another interesting Borel sum:

$\zeta(0) + \zeta(-1) + \zeta(-2)+... = -1/2 - \Sigma ß_n / n$

where ζ(s) is the Riemann zeta function. Then we get

$\Sigma_{n=0..infinity}\ \zeta(-n)\ x^n/n! = ((x-1)\exp(x)+1)/(x\ (\exp(x)-1))$

The Borel sum is

$$\int_0^{inf} \exp(-x)((x-1)\exp(x)+1)/(x\ (\exp(x)-1))\, dx = -\gamma$$

where γ is the Euler constant.

4.6. Another posting:

(4.6.1.) $$PG(0,1-p)+\gamma \qquad = -\sum_{k=0}^{oo}\zeta(2+k)p^{k+1} \qquad 0\le p\le 1$$

wobei PG(a,b)=PolyGamma(a,b)

---

5. References

Projekt Binomial-Matrix

[Project-Index] http://go.helms-net.de/math/binomial/index

[Intro] http://go.helms-net.de/math/binomial/intro.pdf

[binomialmatrix] http://go.helms-net.de/math/binomial/01_1_binomialmatrix.pdf

[signed binomial] http://go.helms-net.de/math/binomial/01_2_signedbinomialmatrix.pdf

[Gaussmatrix] http://go.helms-net.de/math/binomial/04_1_gaussmatrix.pdf

[Stirlingmatrix] http://go.helms-net.de/math/binomial/05_1_stirlingmatrix.pdf

[Hasse] http://go.helms-net.de/math/binomial/01_x_recihasse.pdf

Projekt Bernoulli-Zahlen

[Bernoulli] http://go.helms-net.de/math/binomial/bernoulli_en.pdf

[Summation] http://go.helms-net.de/math/binomial/pmatrix.pdf

Gottfried Helms, 15.01.2007
