

Bernoulli-Zahlen mit Matrix-Operationen

Gottfried Helms 3'2006

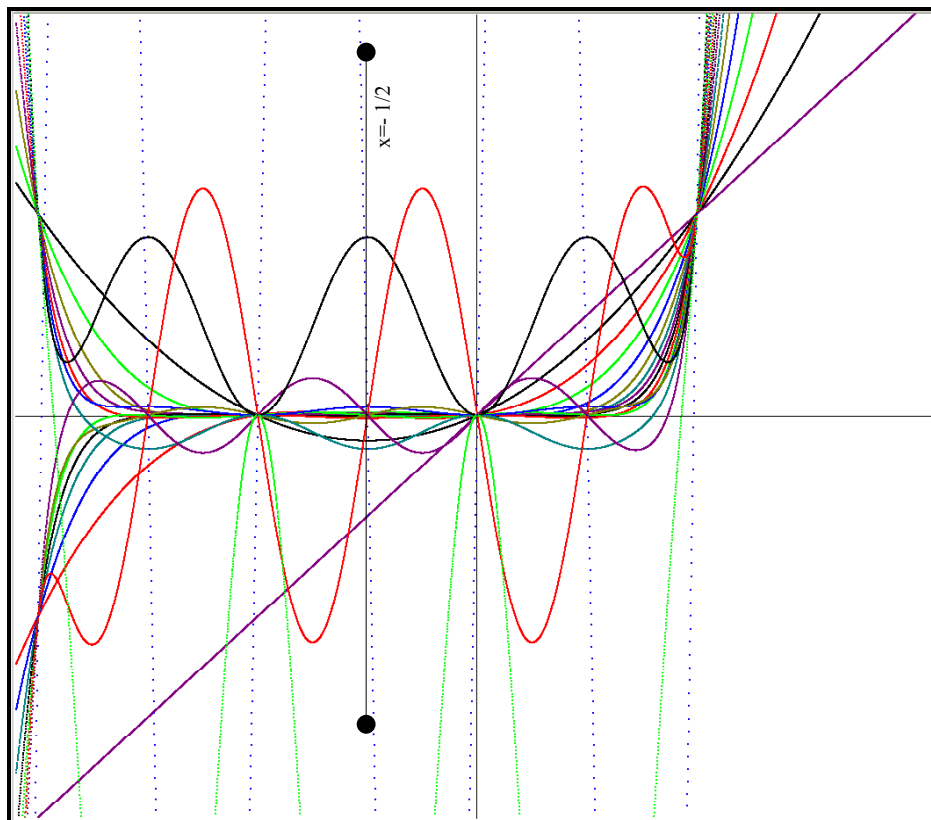
Version 2.3

Bernoulli-Zahlen mit Matrixoperationen.....	2
1. Einleitung.....	2
2. Eine bekannte Rekursionsgleichung (mit einem kleinen Fehler).....	3
3. Zwei Bernoullizahlen-Versionen B_m und B_p ?.....	4
4. Berechnung der Bernoullizahlen durch Matrixinversion von (P-I).....	6
5. J enthält Eigenwerte und G_m bzw. G_p enthalten Eigenvektoren von P_z bzw P_s	7
6. Die Binomial-Matrix und das Matrixexponential.....	8
7. Die Bernoulli-Vektoren und das Matrixexponential.....	8
8. Die Struktur der übrigen G_m - und G_p - Koeffizienten und Rekursionsformeln für die Bernoullizahlen.....	9
9. Potenzsummen aus G_p	10
10. Polynome aus den Koeffizienten der Binomialmatrix P_s	11
11. Stellen der G_m - und G_p - Polynome für reelle x.....	12
12. G_p ("Gotti")-Matrix und Stirlingzahlen.....	14
13. Sample MatMate-Code.....	15
14. Grafiken.....	16
Literatur (Online-Ressourcen).....	19

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & 2 & . & . \\ . & . & 3 & . \end{bmatrix} \right)$$

Binomial = exp (Zählen)

Funktion $G_{p,1..18}(x) =$ $(x=-2..+2, y=-2..+2)$



Bernoulli-Zahlen mit Matrixoperationen

1. Einleitung

Über die Bernoulli-Zahlen gibt es reichlich Literatur; also warum ein weiterer Artikel?

Es war einfach mein privates Interesse, das Problem und die Applikation der Bernoulli-Zahlen besser zu verstehen; hinzu kommt, daß ich das gerne mit meiner Matrix-Notation anfassen wollte, die mir für viele Probleme, vor allem aus der "recreational mathematics", oftmals hilfreich und besonders kompakt und deshalb einprägsam war. Die Ergebnisse, die hier dokumentiert werden, sind wohl nicht so neu, immerhin finde ich einige Darstellungen, die nicht gerade "prominent" in den Dokumentationen sind, und mir zumindest selbst deshalb neu und teilweise überraschend sind.

Die interessantesten Erkenntnisse, die ich mir hiermit erworben habe:

- Die Binomialmatrix \mathbf{P} läßt sich als $EXP()$ -Funktion aus den natürlichen Zahlen berechnen
- Polynome, die mit den Koeffizienten aus der Binomialmatrix \mathbf{P} gebildet werden, haben Nullstellen von komplexen Werten x mit $x=1/2 + i*\tan(t)$, wobei t Kreisteilungspunkte repräsentiert
- Die Bernoullizahlen können gefunden werden im ersten Eigenvektor der vorzeichenbehafteten Binomialmatrix \mathbf{P}_s ($=\mathbf{P}*\mathbf{J}$) bzw \mathbf{P}_z ; ($=\mathbf{J}*\mathbf{P}$); die Eigenwertmatrix ist die Einheitsmatrix mit alternierendem Vorzeichen \mathbf{J}
- Die gelegentlich problematisierte Definition der Bernoullizahl β_1 als + oder - 1/2 (hier als Bernoullivektoren \mathbf{B}_p bzw \mathbf{B}_m) läßt sich als spezifische Lösung desselben systematischen Konzeptes erklären und darauf basierende Formeln lassen sich (soweit das Matrix-Konzept jeweils reicht) ineinander überführen.
- Der Satz der Eigenvektoren (im folgenden \mathbf{G} -Matrix-benannt) enthält die Koeffizienten der Integrale der Bernoulli-Funktionen; diese Funktionsintegrale liefern direkt die Bernoullis'schen Potenzsummen für natürlichzahlige Argumente, aber auch rekursive Definitionen sowie markante Graphen für reellwertige Argumente.

Die meisten Ergebnisse waren zunächst heuristischer Natur; die Bezüge zu den bekannten Formeln sind meist nicht einfach zu erkennen; hilfreich ist hierbei, wenn in den Handbüchern neben den meist impliziten Definitionen Tabellen der konkreten Koeffizienten angegeben werden, sodaß die Matrixformel neben dem "Ausrollen" auf die zugrundeliegenden skalaren Operationen auch im Ergebnis überprüft werden kann.

Ausblick:

Der Matrixansatz hat eine immanente Beschränkung durch die diskrete und natürlichzahlige Indizierung der Matrixzeilen. Gibt die Matrixzeile n die Koeffizienten für die Potenzsumme n 'ten Grades, kann nicht ohne weiteres die Potenzsumme für negative, rationale, allgemein reelle oder gar komplexe Exponenten gebildet werden. Dieses Problem sowie Möglichkeiten der Parametrisierung der Eigenvalue-Matrix \mathbf{J} , die zu anderen (möglicherweise komplexen) Varianten der Matrix \mathbf{P} führen, sind Gegenstand meiner aktuellen Untersuchungen.

Einer der anfänglich besonders effektiven Denkanstöße dabei war interessanterweise ein kleiner Fehler, der sich durch viele Internet-Ressourcen zieht; ein kleiner zwar, aber signifikanter Fehler.

2. Eine bekannte Rekursionsgleichung (mit einem kleinen Fehler)

Auf der Webseite "Bernoulli-numbers" in [mathworld] wird die bekannte Rekursionsgleichung zur Bestimmung der Bernoulli-Zahlen

$$(B+1)^{[n]} = B^{[n]} \quad (\text{Eq 31})$$

angegeben. Um den folgenden Text unzweideutiger zu machen, ersetze ich hier den originalen Buchstaben B durch β , und stelle β und 1 um:

$$(2.1) \quad (1 + \beta)^{[n]} = \beta^{[n]}$$

wobei die entstehenden i 'ten Potenzen mit $i=0..n$ von β ersetzt werden durch die i 'ten Bernoulli-Zahlen: $\beta^{[i]} \rightarrow \beta_i$

Schreibt man diese Rekursionsformel aus und setzt sie für fortlaufende n untereinander, erhält man folgendes Schema:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1 * \beta_0 \\ \beta_1 &= 1 * \beta_0 + 1 * \beta_1 \\ \beta_2 &= 1 * \beta_0 + 2 * \beta_1 + 1 * \beta_2 \\ \beta_3 &= 1 * \beta_0 + 3 * \beta_1 + 3 * \beta_2 + 1 * \beta_3 \\ &\dots \\ \beta_n &= 1 * \beta_0 + ch(n,1) * \beta_1 + ch(n,2) * \beta_2 + \dots + ch(n,n-1) * \beta_{n-1} + 1 * \beta_n \end{aligned}$$

wobei " n über k " oder " $ch(n,k)$ " die Binomialkoeffizienten liefert:

$$(2.2) \quad ch(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dieses Schema kann man als Matrixformel auffassen, in dem \mathbf{B} der Spaltenvektor der Bernoulli-Zahlen ist, und \mathbf{P} die Koeffizientenmatrix, die gerade das bekannte Pascal-Dreieck darstellt.

Die angegebene Rekursionsformel ergibt also

$$(2.3) \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} * \mathbf{B} \quad \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

immerhin eine interessante Gleichung, die die Form eines Eigenvektorzusammenhangs hat, der auch so dargestellt werden kann (der Nullvektor sei " \mathbf{O} ")

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{P} * \mathbf{B} - \mathbf{B} \\ \mathbf{O} &= (\mathbf{P} - \mathbf{I}) * \mathbf{B} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ 1 & 2 & 0 & . \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

β_0 müßte hier allerdings nach der zweiten Matrix-Zeile in (2.4) gleich Null sein, daraus folgte dann aus der dritten Matrixzeile auch $\beta_1=0$ usw. kurz: es müßte der Vektor der Bernoullizahlen \mathbf{B} gleich dem Null-Vektor sein, was aber nicht zutrifft.

3. Zwei Bernoullizahlen-Versionen B_m und B_p ?

Der Fehler steckt in der Rekursionsgleichung (2.1), und zwar - zunächst offensichtlich- an der Stelle $n=1$. Es ist (2.1) zufolge:

$$(3.1) \quad \beta_1 = 1 * \beta_0 + 1 * \beta_1$$

Die erste Bernoullizahl β_0 ist definiert als 1, die zweite β_1 als $-1/2$. Eingesetzt in diese Gleichung ergibt sich ein Widerspruch:

$$(3.2) \quad -1/2 = 1 * 1 + 1 * (-1/2) = 1/2 \quad // \text{Fehler!}$$

Für die Zeile $n = 1$ muß die Gleichung also lauten

$$(3.3a) \quad (-1) * (1 + \beta)^{[1]} = \beta^{[1]}$$

oder

$$(3.3b) \quad (1 + \beta)^{[1]} - 1 = \beta^{[1]}$$

Da die weiteren Bernoullizahlen β mit ungeradem Index alle Null sind, ist nicht klar, ob dieser Fehler auch für diese Matrixzeilen zu korrigieren wäre. Wenn man jedoch annimmt, daß dies so sein kann, kommt man zu einer brauchbaren und konsistenten Darstellung.

Sei \mathbf{I} die Einheitsmatrix mit 1 in der Diagonale, jeweils mit für die verwendete Matrixformel passender Größe :

$$(3.4) \quad \mathbf{I} := \text{diag}(1, 1, 1, 1, \dots)$$

und \mathbf{J} die entsprechende Diagonalmatrix mit alternierendem Vorzeichen

$$(3.5) \quad \mathbf{J} := \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots) \quad \text{woraus} \quad \mathbf{J} * \mathbf{J} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{J} = \text{inv}(\mathbf{J})$$

Hiermit ist nun, da sich nur das Vorzeichen von β_l in \mathbf{B}_p und \mathbf{B}_m unterscheidet und desweiteren alle $\beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = \dots = 0$ und deren Vorzeichen beliebig bzw. null,

$$(3.6) \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{J} * \mathbf{B}_m \\ \text{sowie} \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{J} * \mathbf{B}_p$$

Der kleine Fehler kann nun einfach ausgebügelt werden, indem man schreibt:

$$(3.7) \quad \mathbf{J} * \mathbf{P} * \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m \quad \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw. nach Umformulierung von \mathbf{B}_m nach \mathbf{B}_p

$$(3.8) \quad \mathbf{J} * \mathbf{P} * (\mathbf{J} * \mathbf{B}_p) = (\mathbf{J} * \mathbf{B}_p)$$

$$(3.9) \quad (\mathbf{P} * \mathbf{J}) * \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p \quad \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da gegenüber \mathbf{P} bei $\mathbf{J}*\mathbf{P}$ lediglich die Zeilenvorzeichen alternieren und bei $\mathbf{P}*\mathbf{J}$ die Spaltenvorzeichen, seien Kurzschreibweisen für diese beiden Varianten eingeführt:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_z &:= \mathbf{J} * \mathbf{P} && // \text{Zeilenvorzeichen alternieren} \\ \mathbf{P}_s &:= \mathbf{P} * \mathbf{J} && // \text{Spaltenvorzeichen alternieren} \end{aligned}$$

Diese drei Schreibweisen sind nach dem vorstehenden dann sinnvoll und gleichwertig:

$$(3.11.1) \quad \mathbf{P}_z * \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m$$

$$(3.11.2) \quad \mathbf{P}_s * \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p$$

und da

$$\mathbf{P}_s * \mathbf{B}_p = (\mathbf{P}*\mathbf{J}) * \mathbf{B}_p = \mathbf{P} * (\mathbf{J}*\mathbf{B}_p) = \mathbf{P} * \mathbf{B}_m$$

kann auch die vorzeichenfreien Binomialmatrix-Version verwendet werden:

$$(3.11.3) \quad \mathbf{P} * \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_p$$

Die zwei möglichen Rekursionsgleichungen lauten damit korrekt:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} (-1)^n (1 + \beta)^{[n]} &= \beta^{[n]} // \text{um } B_m \text{ zu berechnen} \\ (1 - \beta)^{[n]} &= \beta^{[n]} // \text{um } B_p \text{ zu berechnen} \end{aligned}$$

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei hier explizit ausgedrückt:

- die o.a. Überlegungen zeigen m. Mn. nach, daß es sich bei den verschiedenen \mathbf{B} Versionen nicht um "einen Fehler" handelt, sondern um zwei völlig gleichwertige Definitionen, die lediglich Konsequenzen haben im Hinblick auf die Darstellung der Formeln; aus (3.11...) mag dies deutlich hervorgehen. Wegen der größeren Einfachheit bei der Berechnung der Potenzsummen würde ich jedoch die \mathbf{B}_p (bzw siehe weiter unten: \mathbf{G}_p) Version vorziehen.

Tabelle 3.1: \mathbf{B}_m und \mathbf{B}_p : Vektoren der Bernoullizahlen:

n	\mathbf{B}_m	\mathbf{B}_p	\mathbf{I}_l
0	1.000	1.000	0
1	-0.500	0.500	1
2	0.167	0.167	0
3	0.000	0.000	0
4	-0.033	-0.033	0
5	0.000	0.000	0
6	0.024	0.024	0
7	0.000	0.000	0
8	-0.033	-0.033	0

Tabelle 3.2: Rekursionsformeln $\mathbf{P}_s * \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p$ und $\mathbf{P}_z * \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m$

$$\text{Rek.1: } (1 - \beta_p)^{[n]} = \beta_p^{[n]}$$

$$\text{Rek.2: } (-1)^n * (1 + \beta_m)^{[n]} = \beta_m^{[n]}$$

$$\mathbf{P}_s * \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_z * \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Berechnung der Bernoullizahlen durch Matrixinversion von (P-I)

Mit der korrigierten Rekursionsformel kann die Binomial-Matrix verwendet werden, um den Bernoullivektor zu bestimmen. Man kann sich hierbei folgende Definition zunutze machen:

$$(4.1) \quad \mathbf{I}_l := \mathbf{B}_p - \mathbf{B}_m = \{0, 1, 0, 0, \dots, 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus (3.11.3)} \quad \mathbf{P}^* \mathbf{B}_m &= \mathbf{B}_p \\ \text{mit (4.1)} \quad \mathbf{P}^* \mathbf{B}_m &= \mathbf{B}_m + \mathbf{I}_l \\ (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_m &= \mathbf{I}_l \end{aligned}$$

folgt dann

$$(4.2) \quad \mathbf{B}_m = \text{inv}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) * \mathbf{I}_l$$

und der Bernoullivektor \mathbf{B}_m ist in der zweiten Spalte ($i=1$) der invertierten $(\mathbf{P}-\mathbf{I})$ -Matrix.

Umgekehrt ist der Bernoullivektor \mathbf{B}_p völlig analog zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{aus (3.11.3)} \quad \mathbf{P}^* \mathbf{B}_m &= \mathbf{B}_p \\ \text{mit (4.1)} \quad \mathbf{P}^*(\mathbf{B}_p - \mathbf{I}_l) &= \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_p - \mathbf{I}_l &= \text{inv}(\mathbf{P}) * \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{I}_l &= (\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I}) * \mathbf{B}_p \end{aligned}$$

folgt dann

$$(4.3) \quad \mathbf{B}_p = -\text{inv}(\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I}) * \mathbf{I}_l$$

und der Bernoullivektor \mathbf{B}_p ist in der zweiten Spalte ($i=1$) der negativen invertierten $(\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I})$ -Matrix.

Dieses Problem ist allerdings nicht direkt zu lösen. Durch die Subtraktion von \mathbf{I} ist die Matrix $\mathbf{P}-\mathbf{I}$ wie auch $(\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I})$ singular und kann deshalb nicht invertiert werden.

$$(4.3.1) \quad \begin{bmatrix} \text{inv}(P) - I \\ 0 & & & \\ -1 & 0 & & \\ 1 & -2 & 0 & \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_p \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trotzdem kann man bei einer höchsten Zeilennummer von $n+1$ alle Bernoullizahlen von β_0 bis β_n direkt berechnen: durch Einsetzen ab der zweiten Zeile. Dies bedeutet praktisch, daß man lediglich die untere Submatrix von $\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I}$, nämlich $(\text{inv}(\mathbf{P}) - \mathbf{I})_{[1..n+1, 0..n]}$ invertieren muß, um zu einer Lösung für $\beta_{0..n}$ zu kommen. Die so berechneten Inversen seien im folgenden Text mit \mathbf{G}_p (bzw. \mathbf{G}_m) bezeichnet.

In der folgenden Formel gibt $\mathbf{P}^{[n+1]}$ die um 1 Zeile/Spalte verlängerte \mathbf{P} -Matrix an, und die $[_{z,s}]$ -Indizes geben hierbei die zu verwendenden Zeilen-, bzw Spaltenbereiche an:

$$(4.4) \quad \mathbf{G}_m := \text{inv}((\mathbf{P}^{[n+1]} - \mathbf{I})_{[1..n+1, 0..n]})$$

$$(4.5) \quad \mathbf{G}_p := -\text{inv}((\text{inv}(\mathbf{P})^{[n+1]} - \mathbf{I})_{[1..n+1, 0..n]})$$

Reduzieren wir den Spaltenvektor $\mathbf{I}_l^{[n+1]}$ ebenfalls um die erste Zeile, erhalten wir

$$(4.6) \quad \mathbf{I}_0 := \{1, 0, 0, \dots, 0\}'$$

und wir bestimmen die Bernoulli-Vektoren aus den Inversen \mathbf{G}_p bzw \mathbf{G}_m

$$(4.7) \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{G}_p * \mathbf{I}_0 = \mathbf{G}_p [0..n, 0]$$

$$(4.8) \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{G}_m * \mathbf{I}_0 = \mathbf{G}_m [0..n, 0]$$

einfach durch Extraktion der ersten Spalte aus \mathbf{G} .

5. \mathbf{J} enthält Eigenwerte und \mathbf{G}_m bzw. \mathbf{G}_p enthalten Eigenvektoren von \mathbf{P}_z bzw. \mathbf{P}_s

Die interessante Neuigkeit besteht also darin, daß \mathbf{B}_p (bzw. \mathbf{B}_m), berechnet aus der um eine Zeile verlängerten Matrix $\mathbf{P}^{[n+1]}$, der erste Eigenvektor genau der mit n Zeilen ausgestatteten Matrix \mathbf{P}_s (bzw. \mathbf{P}_z) ist. Analog, und viel interessanter, gilt das für die Matrizen \mathbf{G}_p (bzw. \mathbf{G}_m) selbst, die jeweils die vollen Sätze aller Eigenvektoren enthalten.

Wir haben jetzt also die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

Sei

\mathbf{P} die Matrix der Binomialkoeffizienten

$\mathbf{J} = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots)$ die Einheitsmatrix, bei der die Vorzeichen in der Diagonale alternieren

dann ist

$$(5.1) \quad \mathbf{J} = \text{inv}(\mathbf{J})$$

$$(5.2) \quad \mathbf{J} * \mathbf{P} * \text{inv}(\mathbf{J}) = \mathbf{J} * \mathbf{P} * \mathbf{J} = \text{inv}(\mathbf{P})$$

$$(5.3) \quad \mathbf{P} * \mathbf{J} = \mathbf{P}_s \text{ die Binomialmatrix mit pro Spalte alternierenden Vorzeichen}$$

$$(5.4) \quad \mathbf{J} * \mathbf{P} = \mathbf{P}_z \text{ die Binomialmatrix mit pro Zeile alternierendem Vorzeichen}$$

$$(5.5) \quad \mathbf{P}_s * \mathbf{G}_p = \mathbf{G}_p * \mathbf{J} \text{ oder } \mathbf{P}_s = \mathbf{G}_p * \mathbf{J} * \text{inv}(\mathbf{G}_p)$$

$$(5.6) \quad \mathbf{P}_z * \mathbf{G}_m = \mathbf{G}_m * \mathbf{J} \text{ oder } \mathbf{P}_z = \mathbf{G}_m * \mathbf{J} * \text{inv}(\mathbf{G}_m)$$

$$(5.7) \quad \mathbf{J} \text{ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von } \mathbf{P}_s \text{ und } \mathbf{P}_z$$

$$(5.8) \quad \mathbf{G}_p \text{ die Matrix der Eigenvektoren von } \mathbf{P}_s$$

$$(5.9) \quad \mathbf{G}_m \text{ die Matrix der Eigenvektoren von } \mathbf{P}_z$$

$$(5.10) \quad \mathbf{J} * \mathbf{G}_p * \mathbf{J} = \mathbf{G}_m$$

$$(5.11) \quad \mathbf{J} * \mathbf{G}_m * \mathbf{J} = \mathbf{G}_p$$

Tabelle 5.1: \mathbf{G}_m und \mathbf{G}_p

Zl	\mathbf{G}_m , die ersten 4 Spalten (0..3)					\mathbf{G}_p , die ersten 4 Spalten (0..3)			
0	1.000	0.000	0.000	0.000	...	1.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.500	0.500	0.000	0.000	...	0.500	0.500	0.000	0.000
2	0.167	-0.500	0.333	0.000	...	0.167	0.500	0.333	0.000
3	0.000	0.250	-0.500	0.250	...	0.000	0.250	0.500	0.250
4	-0.033	0.000	0.333	-0.500	...	-0.033	0.000	0.333	0.500
5	0.000	-0.083	0.000	0.417	...	0.000	-0.083	0.000	0.417
6	0.024	0.000	-0.167	0.000	...	0.024	0.000	-0.167	0.000

6. Die Binomial-Matrix und das Matrixexponential

Eine -für mich wunderschöne - Eigenschaft der Binomial-Matrix ist, daß sie ausgedrückt werden kann als Matrixexponential eines allerelementarsten Parameters: nämlich einer Matrix mit der Folge der natürlichen Zahlen $1..n$ in der 1. Subdiagonale, hier bezeichnet mit \mathbf{T}

Als Matrixgleichung ausgedrückt ist das das Pascal/Binomial-Dreieck:

$$(6.1) \quad \mathbf{P} = \exp(\mathbf{T})$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & 2 & . & . \\ . & . & 3 & . \end{bmatrix} \right)$$

Eine ausführlichere Herleitung findet sich z.B. in [Helms1] und [Edelman].

7. Die Bernoulli-Vektoren und das Matrixexponential

Unter Verwendung des Matrixexponential erscheinen vertraute Formeln, wenn in ihnen

$$\text{inv}(\mathbf{P}) = \exp(\mathbf{T})^{-1} = \exp(-\mathbf{T})$$

eingesetzt wird, und die Submatrix $[1..n, 0..n-1]$ einer um 1 Zeile verlängerten Matrix $\mathbf{P}^{[n+1]}$ mit dem Doppelpunkt $\dot{\mathbf{P}}$ bezeichnet wird:

$$(7.1) \quad \mathbf{B}_m = \dot{(\exp(\mathbf{T}) - \mathbf{I})}^{-1} * \mathbf{I}_0$$

$$(7.2) \quad \mathbf{B}_p = \dot{(\exp(-\mathbf{T}) - \mathbf{I})}^{-1} * \mathbf{I}_0$$

was für \mathbf{B}_m anschaulich den skalaren Term aus der Generatorfunktion für die Bernoulli-Zahlen

$$\frac{1}{\exp(t) - 1}$$

und für \mathbf{B}_p

$$\frac{-1}{\exp(-t) - 1} = \frac{\exp(t)}{\exp(t) - 1}$$

nachbildet. (vgl die beiden Formeln in Tabellenhandbüchern, (bei denen im Zähler noch der Parameter t selbst hinzukommt), oder deren Diskussion in [Luschny],)

8. Die Struktur der übrigen G_m - und G_p - Koeffizienten und Rekursionsformeln für die Bernoullizahlen

Heuristisch läßt sich für kleine n die folgende sehr plausible Darstellung für die Koeffizienten finden. Hierbei sind die Zeilen- und Spaltenindizes z und s nullbasiert zu verstehen, und wie in (2.2), und die $ch(z,s)$ -Funktion als "z über s":

$$(8.1) \quad G_m[z, s] = \frac{ch(z, s)}{s + 1} * B_m[z - s]$$

$$(8.2) \quad G_p[z, s] = \frac{ch(z, s)}{s + 1} * B_p[z - s]$$

Bezeichnet man mit "*" eine elementweise Multiplikation zweier gleichdimensionaler Matrizen kann man das so darstellen:

$$G_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{1}{3} & \cdot \\ \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} * \# \begin{bmatrix} \beta_0 & & & \\ \beta_1 & \beta_0 & & \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix}$$

wobei die Zähler in der linken Matrix wieder gerade die Binomialmatrix P darstellen.

Tabelle 8.1: Matrizen G_m und G_p :

Zl	G_m , die ersten 4 Spalten (0..3)					G_p , die ersten 4 Spalten (0..3)			
0	1.000	0.000	0.000	0.000	...	1.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.500	0.500	0.000	0.000	...	0.500	0.500	0.000	0.000
2	0.167	-0.500	0.333	0.000	...	0.167	0.500	0.333	0.000
3	0.000	0.250	-0.500	0.250	...	0.000	0.250	0.500	0.250
4	-0.033	0.000	0.333	-0.500	...	-0.033	0.000	0.333	0.500
5	0.000	-0.083	0.000	0.417	...	0.000	-0.083	0.000	0.417
6	0.024	0.000	-0.167	0.000	...	0.024	0.000	-0.167	0.000

Die Zeilensummen in G_m sind gleich Null und in G_p gleich 1, sodaß

$$(8.3) \quad G_m[z, 0] = -\sum_{s=1}^z G_m[z, s] \qquad G_p[z, 0] = 1 - \sum_{s=1}^z G_p[z, s]$$

Hierin finden sich wiederum bekannte Rekursionsformeln für die Bernoullizahlen selbst:

$$(8.4.1) \quad \beta_{m,n} = 0 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{ch(n, k)}{k + 1} * \beta_{m, n-k} \right) \qquad \beta_{p,n} = 1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{ch(n, k)}{k + 1} * \beta_{p, n-k} \right)$$

9. Potenzsummen aus G_p

Die Bildung der Potenzsummen $S_{m,n} = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$ ist mit G_p eine einfache Matrixmultiplikation. Man bilde den Vandermondevektor

$$(9.1) \quad \mathbf{V} := \mathbf{V}_m(n) = \{n, n^2, n^3, \dots, n^{m+1}\}$$

und multipliziere um den Potenzsummenvektor \mathbf{S} zu erhalten:

$$(9.2) \quad \mathbf{S} := \mathbf{G}_p * \mathbf{V}_m(n)$$

und findet in der Zeile $\mathbf{S}[m]$ die Summe der m 'ten Potenzen von 1 bis n :

Tabelle 9.1: Potenzsummen

$$\begin{array}{c} \mathbf{G}_p \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & . & . & . \\ 0.5 & 0.5 & . & . \\ 0.167 & 0.5 & 0.333 & . \\ . & 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \right] \end{array} * \begin{array}{c} \mathbf{V}_4(3) = \mathbf{S}_4(3) \\ \left[\begin{array}{c} 3^1 \\ 3^2 \\ 3^3 \\ 3^4 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1^0 + 2^0 + 3^0 \\ 1^1 + 2^1 + 3^1 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 14 \\ 36 \end{array} \right] \end{array}$$

Tabelle 9.2 Das originale Problem des Jakob Bernoulli (Quelle:[MICH])

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi).

99

Die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen.

$$S(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n,$$

$$S(n^2) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n,$$

$$S(n^3) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2,$$

$$S(n^4) = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n,$$

$$S(n^5) = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2,$$

$$S(n^6) = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n,$$

$$S(n^7) = \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2,$$

$$S(n^8) = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30} n,$$

$$S(n^9) = \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{12} n^2,$$

$$S(n^{10}) = \frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - 1 n^7 + 1 n^5 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{5}{66} n.$$

Wer aber diese Reihen in Bezug auf ihre Gesetzmässigkeit genauer betrachtet, kann auch ohne umständliche Rechnung die Tafel fortsetzen. Bezeichnet c den ganzzahligen Exponenten irgend einer Potenz, so ist

10. Polynome aus den Koeffizienten der Binomialmatrix P_s

Verwendet man die Einträge der (vorzeichenbehafteten) P_s -Matrix als Koeffizienten für Polynome in x , ergeben sich interessante Funktionen. Bezeichnen wir den Vandermonde -Vektor $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^z\}'$ (um eine Potenz verringert gegenüber dem vorigen Beispiel) als $V_z(x)$

$$(10.1) \quad V_z(x) = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^z\}'$$

und definieren wir Polynome in x mit den Koeffizienten einer festen Zeile z aus P_s

$$(10.2) \quad f_{m,z}(x) := (P_j - I)_z * V_z(x)$$

$$(10.3) \quad f_{p,z}(x) := (P_j + I)_z * V_z(x)$$

so finden wir für die Nullstellen von $f_{m,z}(x)$ aus der Kreisteilung abgeleitete komplexe Werte für x :

$$(10.4) \quad f_{m,z}(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} * \frac{m}{z}\right) * i \quad \text{für } m=2k \text{ wenn } z \text{ gerade}$$

$$(10.5) \quad f_{p,z}(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} * \frac{m}{z}\right) * i \quad \text{für } m=2k+1 \text{ wenn } z \text{ gerade}$$

und umgekehrt, wenn z ungerade ist, sodaß die Nullstellen für beide Funktionen zusammen gerade aus den Kreisteilungspunkten berechnet werden können. Zusammengeschrieben bedeutet das einfach:

$$(10.6) \quad f_{m,z}(x) * f_{p,z}(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} * \frac{m}{z}\right) * i \quad \text{für } m=0..z-1$$

11. Stellen der G_m - und G_p - Polynome für reelle x

Die obigen Gleichungen liefern die Inversen G_m und G_p der um I verminderten reduzierten (vorzeichenbehafteten) Binomial-Matrizen $(J*P - I)$ bzw. $(P*J - I)$, die interessanterweise zusammen mit J das Eigensystem der originalen (vorzeichenbehafteten) Binomialmatrizen bilden.

Verwenden wir die Einträge einer festen Zeile aus G_m oder G_p mit dem Zeilenindex n als Koeffizienten für Polynome in allgemeineren x (wie in (9.)), aber ohne das Ziel die Potenzsummen eines natürlichen n zu finden), ergeben sich die allgemeineren Funktionen $G_{m,n}(x)$ und $G_{p,n}(x)$.

Die Multiplikation von G mit einem Vandermonde-(Spalten-)Vektor von

$$V(x) := \{x, x^2, x^3, \dots, x^{n+1}\},$$

stellt sich als Polynom so dar:

$$(11.1) \quad G_{m,n}(x) = G_m[n,0]*x + G_m[n,1]*x^2 + G_m[n,2]*x^3 + \dots + G_m[n,n]*x^{n+1}$$

$$(11.2) \quad G_{p,n}(x) = G_p[n,0]*x + G_p[n,1]*x^2 + G_p[n,2]*x^3 + \dots + G_p[n,n]*x^{n+1}$$

Wir erhalten eine Familie von Funktionen, bei der insbesondere auffällt, daß im Bereich $-2 < x < 2$ die lokalen Minima und Maxima sich mit zunehmenden n periodisch verhalten, und sich augenscheinlich zu sinus/kosinusförmigen Kurven approximieren. Die Bilder dieser auffälligen Kurven sind im Anhang beigelegt.

Diese Funktionen haben folgende ausgezeichnete Stellen:

Tabelle 11.1:

	$G_{m,n}(x)$	$G_{p,n}(x)$
	$G_{m,n}(-1) = +/- 1$ $G_{m,n}(0) = 0$ $G_{m,n}(1/2) = 0$ oder lokales Extremum $G_{m,n}(1) = 0$ ($n > 1$) $G_{m,n}(2) = 1$ ($n > 1$)	$G_{p,n}(1) = 1$ $G_{p,n}(0) = 0$ $G_{p,n}(-1/2) = 0$ oder lokales Extremum $G_{p,n}(-1) = 0$ $G_{p,n}(-2) = +/- 1$ ($n > 1$)

Bilden wir außerdem die Ableitungen von $G_{m,n}(x)$ bzw. $G_{p,n}(x)$

$$(11.3) \quad B_{m,n}(x) = d G_{m,n}(x) / dx \quad B_{p,n}(x) = d G_{p,n}(x) / dx$$

also

$$(11.5) \quad B_{m,n}(x) = G_m[n,0] + 2*G_m[n,1]*x + \dots + (n+1) G_m[n,n]*x^n$$

$$(11.6) \quad B_{p,n}(x) = G_p[n,0] + 2*G_p[n,1]*x + \dots + (n+1) G_p[n,n]*x^n$$

erhalten wir mit $B_{m,n}(x)$ gerade die bekannten Bernoulli-Polynome.

Tabelle 11.2: Ausgezeichnete Stellen:

	$B_{m,n}(x)$	$B_{p,n}(x)$
	$B_{m,n}(-1) = +/- 1$ $B_{m,n}(0) = \beta_{m,n}$ $B_{m,n}(1) = 0$ $B_{m,n}(2) = 1/2$	$B_{p,n}(1) = 1$ $B_{p,n}(0) = \beta_{p,n}$ $B_{p,n}(-1) = 0$ $B_{p,n}(-2) = +/- 1/2$ ($n > 1$)

Alles in allem scheinen diese G -Funktionen die interessante Variante zu sein; bspw. findet man in OEIS folgenden Eintrag: [OEIS_A002425]:

- > A002425 *Denominator of $\pi^{2n}/(\Gamma(2n) \cdot (1-2^{-2n}) \cdot \zeta(2n))$.*
- > *1, 1, 1, 17, 31, 691, 5461, 929569, 3202291, 221930581,*
- > *4722116521, 968383680827, 14717667114151, 2093660879252671,*
- > *86125672563201181, 129848163681107301953, 868320396104950823611,*
- > *209390615747646519456961 (list)*
- >
- > *Consider the $C(k)$ -summation process for divergent series: the series*
- > *$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n+1)^k = 1 - 2^k + 3^k - 4^k + \dots$, summable $C(1)$ to the value*
- > *$1/2$ for $k=0$, is for each $k \geq 1$ exactly summable $C(k+1)$ to the sum $s(k+1) = (2^{k+1} - 1) \cdot B(k+1) / (k+1)$ and so $a(n) = \text{Abs}(\text{numerator}(s(2n)))$. -*
- > *Benoit Cloitre (abmt(AT)wanadoo.fr), Apr 27 2002*
- >
- > *Odd part of tangent numbers A000182 (even part is $2^{n-1} A101921(n)$). -*
- > *Ralf Stephan, Dec 21 2004*

Diese sind genau die ungeraden Faktoren der Nenner, die sich ergeben, wenn man die $G_{p,n}(x)$ -Funktionen für $x = -1/2$ berechnet. Möglicherweise gibt es interessante Stellen bei komplexen x ; aber dies muß vorerst als Gegenstand weiterer Untersuchungen zurückbleiben.

12. G_p ("Gotti")-Matrix und Stirlingzahlen

Es ist für einen fortlaufenden Text günstig, auch den G -Matrizen eingängige Namen zu geben; als einen vorläufigen Vorschlag habe ich meinen Spitznamen "**Gotti**" (der außerdem gleich dem des bekannten New Yorker Mafia-"Paten" [John Gotti](#) ist, der seine Bedeutung ebenfalls der Subtraktion (des Reichtums der Reichen) sowie der Inversion (der sozialen Struktur New Yorks) verdankt. Foto aus "[wikipedia](#)")



Hierbei sei die "Gotti"-Matrix i.A. die Matrix G_p und die Polynome in x , die sich wie in Abschnitt 10, ergeben, seien als "Gotti"-Polynome bezeichnet.

Wir haben dann

$$(12.1) \quad P_s = G_p * J * G_p^{-1} \quad P_z = G_m * J * G_m^{-1}$$

Die Gotti-Matrizen G_p haben nun selbst ein interessantes Eigensystem. Es ist nämlich (bisher nur heuristisch verifiziert)

$$(12.2) \quad G_p = S2 * R * S2^{-1} = S2 * R * S1$$

wobei

$S2$: Dreiecksmatrix der Stirlingzahlen 2. Art

$S1$: Dreiecksmatrix der Stirlingzahlen 1. Art

R : Diagonalmatrix der Reziproken der natürlichen Zahlen

ist. Interessant ist hierbei der Zusammenhang von $S1$ und $S2$, der mir in den Formelsammlungen bisher so noch nicht begegnet ist:

$$(12.3) \quad S2 = S1^{-1}$$

und die interessante Tatsache, daß alle Einträge in $S1$ und $S2$ ganzzahlig sind. (Die vergleichbare Eigensystemstruktur für G_m habe ich noch nicht aufgeklärt, die Einträge sind jedenfalls nicht ganzzahlig).

Für die zugrundeliegende Binomialmatrix P_z bedeutet dies das Eigensystem:

$$(12.4) \quad P_z = (S2 * R * S1) * J * (S2 * R^{-1} * S1)$$

oder mit N als Diagonalmatrix der natürlichen Zahlen $N = \text{diag}\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$(12.5.1) \quad P_z = (S1^{-1} * N^{-1} * S1) * J * (S1^{-1} * N * S1)$$

$$(12.5.2) \quad = (S2 * N^{-1} * S2^{-1}) * J * (S2 * N * S2^{-1})$$

das eine bemerkenswerte Hierarchie von bekannten Zahlentypen der Kombinatorik ausdrückt.

Tabelle 12.1

Zl	$S1$, die ersten 6 Spalten (0..5)						$S2$, die ersten 6 Spalten (0..5)					
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	-1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	2	-3	1	0	0	0	1	3	1	0	0	0
3	-6	11	-6	1	0	0	1	7	6	1	0	0
4	24	-50	35	-10	1	0	1	15	25	10	1	0
5	-120	274	-225	85	-15	1	1	31	90	65	15	1

13. Sample MatMate-Code

Hier ist ein Beispielcoding in der Notation meiner MatMate-Sprache:

```

dim = 12 // eine grÖÙe für die Matrizen wählen
J = mkdiag((seq(1,dim) mod 2)*2 - 1) // Einheitsmatrix mit altern. Vorz.

;Binomialmatrix als Matrixexponential von SEQ erzeugen-----

    LG1 = Null(dim+1,dim+1) // leere Log-Matrix mit Dimension dim+1 bereitstellen
    LG1[2..(dim+1),1..dim] = mkDIag(Seq(1,dim)) // Subdiagonale eintragen

    P1 = exp (LG1) // Binomialmatrix als Exponential mit Dimension dim+1
    P1_I = P1 - Einh(dim+1)
    P1_I = P1_I[2..(dim+1),1..dim] //Nullzeile/Spalte entfernen: Dimension ist wieder dim
;-----

;Gm, Gp berechnen und die Binomialmatrix P auf die originalen Dimension DIM zurücksetzen-----
    Gm = inv(P1_I) // Gm berechnen
    Gp = J * Gm * J // die einfache Umrechnung nach Formel (5.11)
    P = P1[1..dim,1..dim] // Binomialmatrix passender Größe bereitstellen
;-----

;Fehlertests: test ob GP und J Eigensystem P*J von ist -----
    fehler = sqsum(P*J - Gp*J*inv(Gp))
; test ob GP und J Eigensystem P*J von ist
    fehler = sqsum(J*P - Gm*J*inv(Gm))
; test ob P * GM = GP ist
    fehler = sqsum(P *Gm - Gp)
;-----

;G - und H-Funktionen an den Stellen x={-2, -1.5, -1,..., 1, 1.5, 2} -----
    x = seq(-2,2,0.5) // Zeilenvektor mit 9 Einträgen x
    tmpI=füllen(dim,spalten(x),1)
    xexp = seq(1,dim)'
    V0 = (x*#tmpI) ^# (xexp*#tmpI) // Vandermondematrix aus x-Werten

    G_x = GP * V0 // dim * 9 Funktionswerte für die 9 x-Werte berechnen

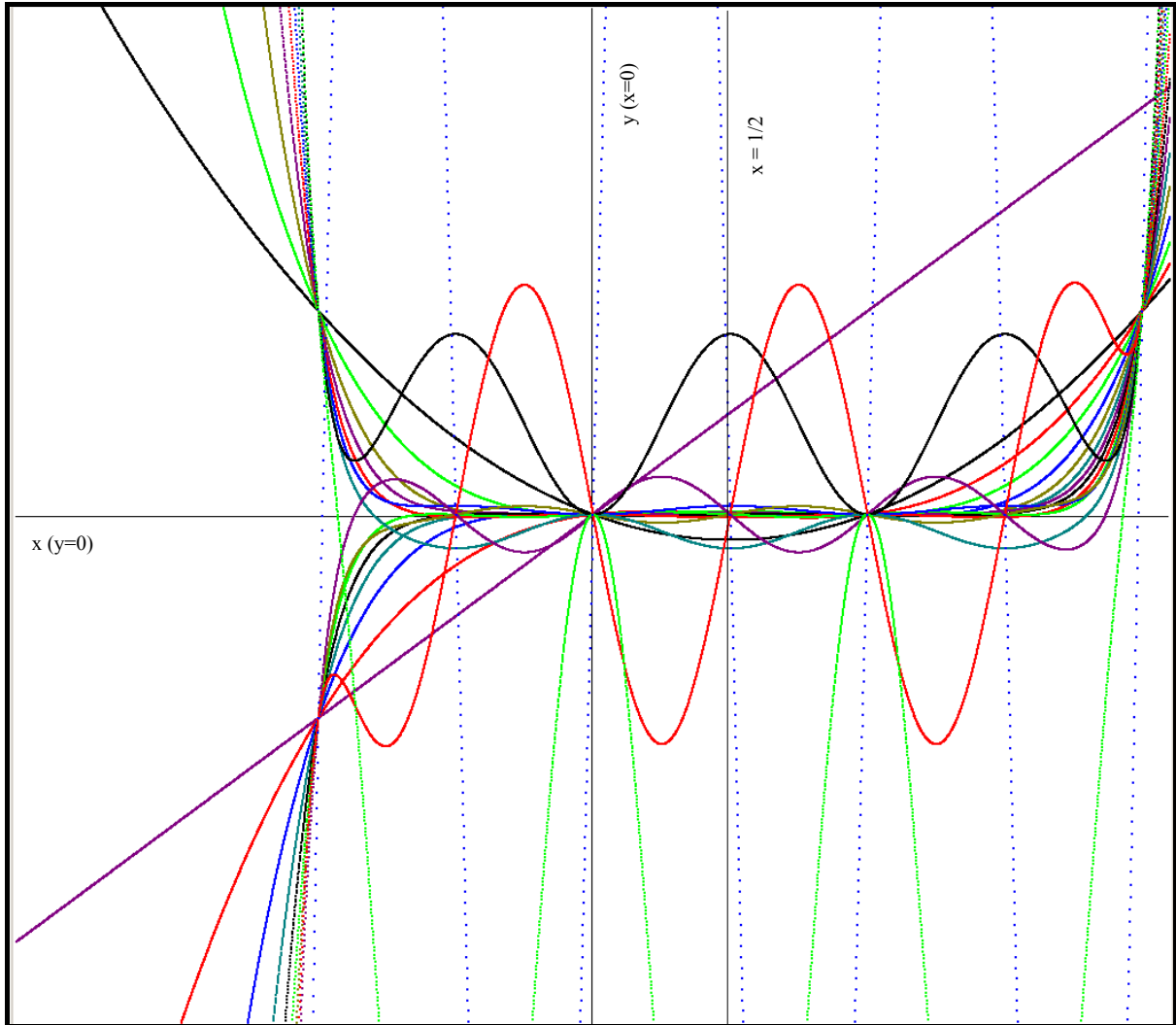
    H_x = G_x /# x // Hx hat schlicht x mit einem um 1 verminderten Exponenten

    Anm: die Operatoren *#, /# und ^# führen "Array" (elementweise) Operationen aus; skalar,
    Vektoren und Matrizen werden ggfls auf passende Größe repliziert

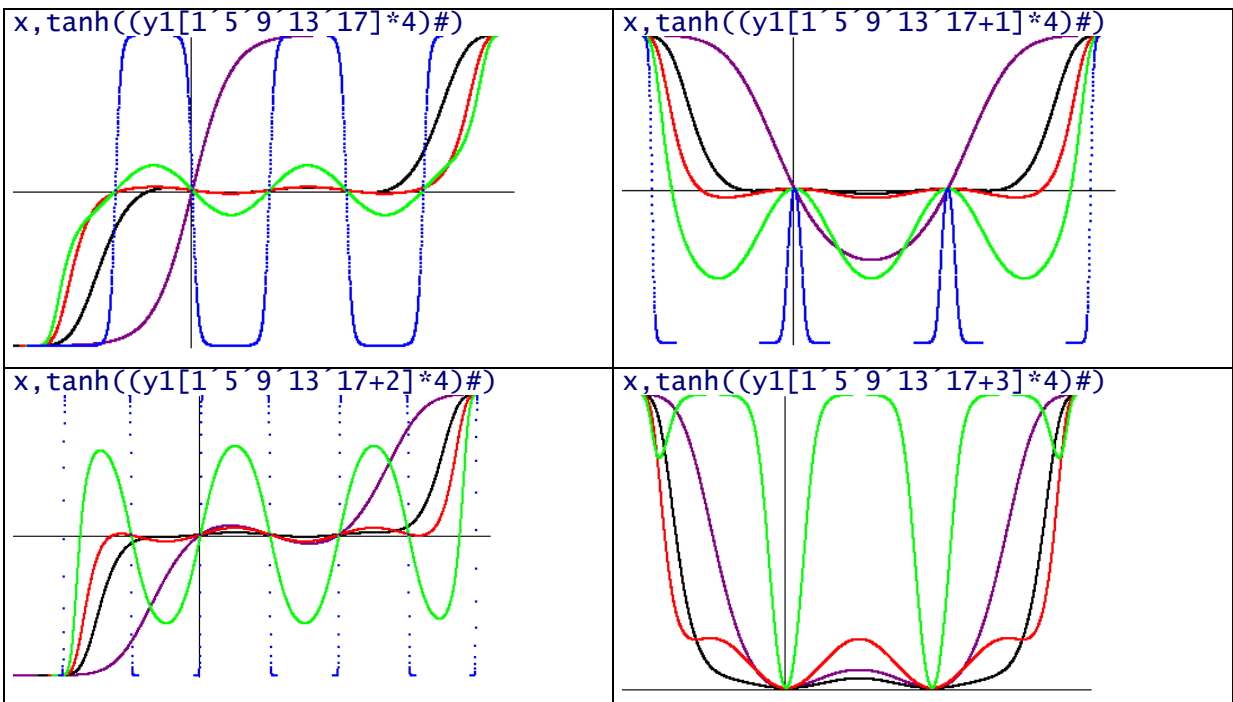
```

14. Grafiken

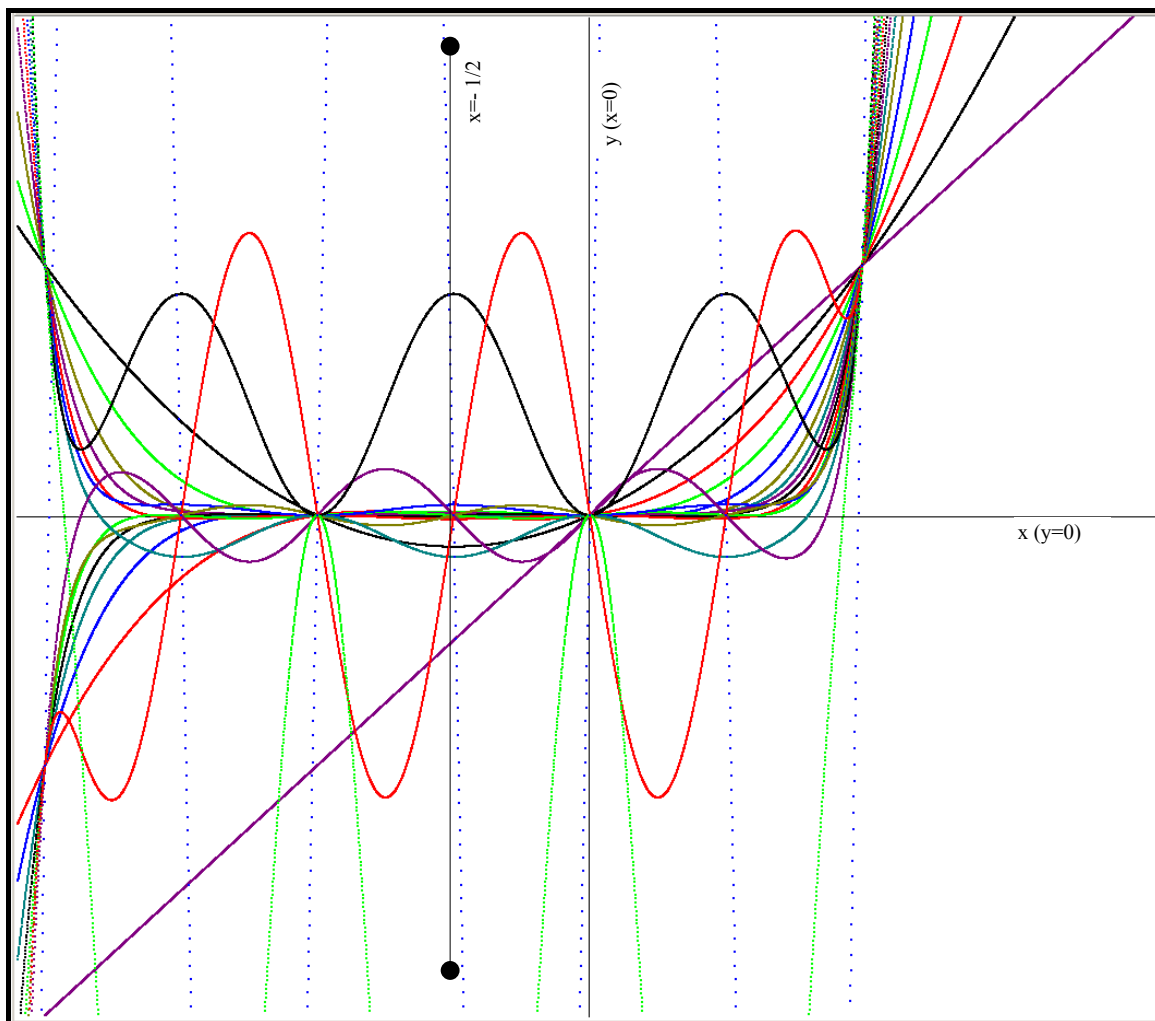
Funktion $G_{m,1..18}(x)$ ($x=-2..+2, y=-2..+2$)



Gezoomt $y'=\tanh(y*4)$; in 4-er Gruppen $G_{m,15^9 13}$ etc

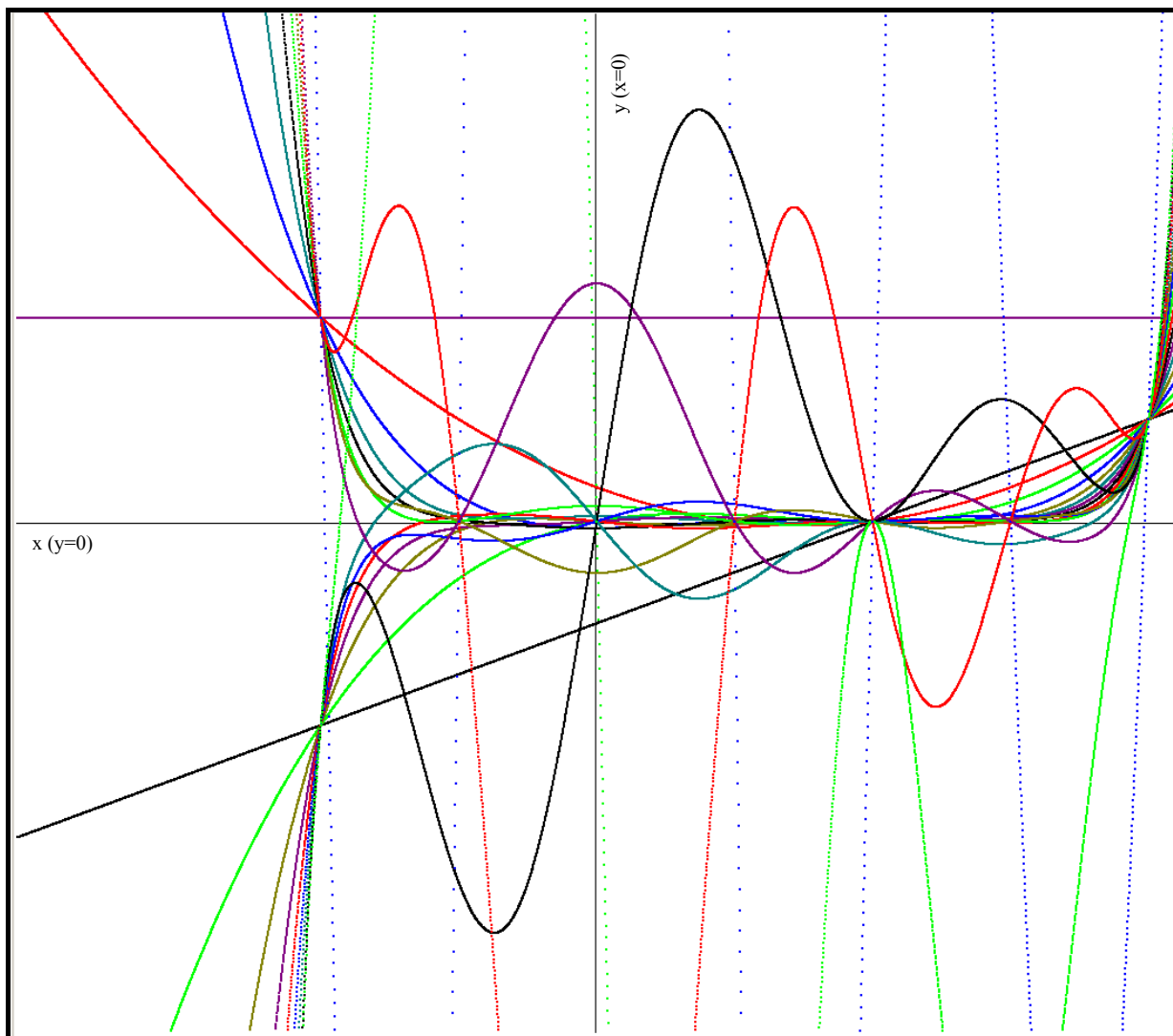


Funktion $\mathbf{G}_{p,1..18}(\mathbf{x})$ ($x=-2..+2, y=-2..+2$)

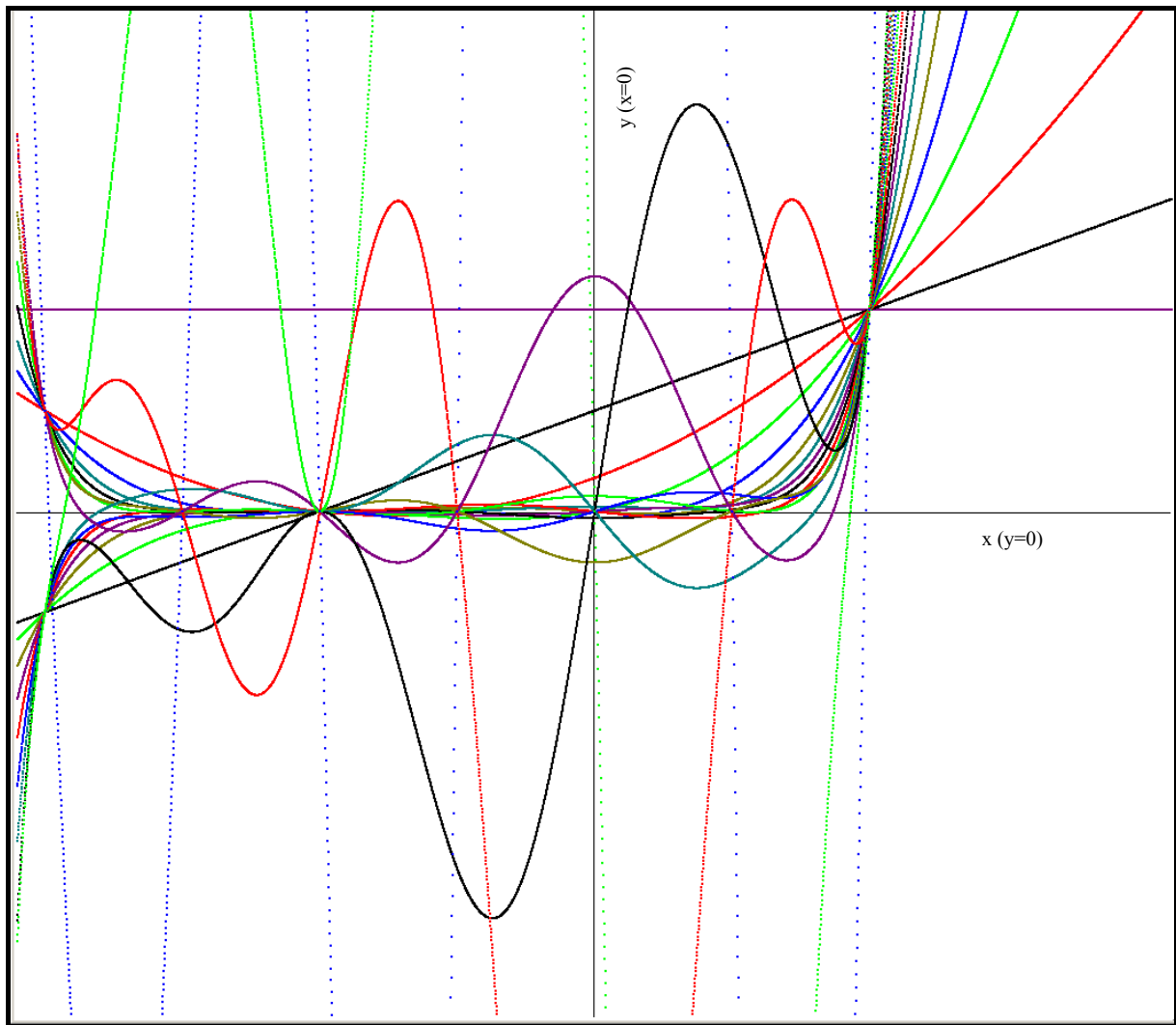


Man beachte hier wie bei $G_m(x)$ die auffällige und sehr spezielle Ähnlichkeit der lokalen Extrema bei jeder Funktion, die sich mit zunehmendem Grad verbessert.

Funktion : $H_{m,1..18}(x) = G_{m,1..18}(x)/x$ ($x=-2..+2, y=-2..+2$)



Funktion : $H_{p,1..18}(x) = G_{p,1..18}(x)/x$ ($x=-2..+2, y=-2..+2$)



Literatur (Online-Ressourcen)

Online-Ressourcen:

Eine Herleitung des Matrixexponentials für das Binomialdreieck:

[Helms1] Gottfried Helms (Kassel)

<http://141.51.96.22/files/PascalDreieckMatrixLog.pdf>

Die Rekursionsformel zur Bestimmung der Bernoulli-Zahlen (Gl. 30 und 31):

[mathworld] Eric Weissstein et al.

<http://mathworld.wolfram.com/Bernoullinnumbers>

Der Originaltext von Jakob Bernoulli:

[Mich] <http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/Bernoulli>, Jakob: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi) von Jakob Bernoulli (1713) Uebers. und hrsg. von R. Haussner. (digitalisiert bei:
<http://www.hti.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABZ9501>

Eine intensive Diskussion der "besten Definition" der Bernoullizahlen; mit dem Vorschlag, die Definition aus den dort ausführlich diskutierten verallgemeinerten Bernoullifunktionen (bzw der Euler-Zahlen aus den entsprechenden Euler-Funktionen) zu entnehmen, die \mathbf{B}_p ($\beta_1 = +1/2$) liefert anstatt \mathbf{B}_m ($\beta_1 = -1/2$), da erstere Version für die primäre Definition aus allgemeinen Konsistenzgründen nahe zu liegen scheint:

"Dies ist vom systematischen Standpunkt aus einfacher und erweist sich als nützlicher als die konventionellen Definitionen über erzeugende Funktionen, denen eine gewisse Willkür anhaftet.

So muss zum Beispiel die Frage, wie B_1 zu definieren ist, bei der Einführung mittels erzeugender Funktionen auf der Basis von Konventionen geregelt werden. Hingegen gibt die Bernoullifunktion eine konventionsfreie, eine analytische Antwort" [Luschny], S.2.

[Luschny] : Peter Luschny (Straßburg)/ Hermann Kremer(Darmstadt)
<http://www.dsmath.de/archiv/zahlen/BernoulliEuler.pdf>

Eine Onlineresource, die mir in <news:sci.math> genannt wurde, und das Thema ähnlich wie hier behandelt:

[Edelman] Alan Edelman & Gilbert Strang, MIT
<http://web.mit.edu/18.06/www/pascal-work.pdf>

Eine weitere interessante Online-Ressource, die sich der Bernoullizahlen gewidmet hat, und in der man neben einigen Forschungsartikeln u.a. Listen der Bernoullizahlen großer Indizes ($n \leq 1\,000\,000$) sowie Freeware-Programme, um selber zu rechnen, finden kann:

[Kellner] Bernd Kellner (Göttingen)
<http://www.bernoulli.org/>

Der folgende Artikel studiert die Wurzeln von Funktionen aus dem Binomialdreieck in ähnlicher Weise wie ich das hier in Abschnitt () mit den Funktionen mit den Koeffizienten aus $PJ - I$ gemacht habe ("*Polynomials From Pascal's Triangle*")

[Mathpages1] Mathforum@Drexel
<http://mathpages.com/home/kmath304.htm>

[OEIS_A002425] N.J.A.S. Sloane, "Online encyclopedia of integer sequences"
(<http://www.research.att.com/~njas/sequences/A002425>)

[Wikipedia] Foto von John Gotti (© public domain)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Johngotti1990.jpg>
